撓性空間原理應用

楊顯彰

一、前言

所謂撓性空間原理（Principle of Flexible Space）（亦可稱爲等效自由體圖原理），就是使運動在不同方向的物體經撓曲運動在同一直線方向，可以用代數和或差運算，簡化了計算過程。所謂「撓性」（Flexibility）一詞，定義爲空間內函的放大或縮小，或位置的改變；空間（Space）一詞，則爲一種想像的區域，此區域內可能包含有質量、力量、速度及加速度等。本文將對此原理之導出及如何應用於工程學（如應用力學，流體力學，電工學等）運動之計算，作有系統介紹與討論，進而做爲三度空間運動系統之研究與應用。

二、切線定理與位置撓曲

如圖２－１所示之簡單裝置，ＡＢ是一段可彎曲但不能伸長的線，ＣＤ是兩個固定的剛性物體，在線的ＡＢ兩端各加拉力 T_1 和 T_2。圖２－２ａ是代表線ＡＢ的自由體圖，圖２－２ｂ是其微分圖，各微分量的表示如下，ｄＦ表示線與接觸物的摩擦力，其方向沿著線，ｄＮ表示線與接觸物之間的正壓力，a_t 表示線的切線加速度，ｄｍ表示線的質量，Ｔ表示張力則：

$$(T+dT)\cos d\left(\frac{\theta}{2}\right)-T\cos d\left(\frac{\theta}{2}\right)-dF=a_t\,dm$$

$$dT-\frac{dF}{\cos d\left(\frac{\theta}{2}\right)}=\frac{a_t\,dm}{\cos d\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$

設 $\cos d\left(\frac{\theta}{2}\right)\approx 1$

則 $dT-dF = a_t\,dm$

$$\int_A^B dT - \int_A^B dF = \int_A^B a_t \, dm$$

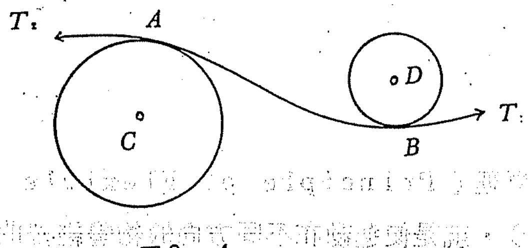


圖2－1

$$T_1 - T_2 - F = a_t m \quad \cdots\cdots (2-1)$$

F是表示從A至B沿線方向的全部摩擦力，如果切線方向無加速度，或假設無質量時，則 $a_t m = 0$

由（2－1）式，則 $T_1 - T_2 - F = 0$

$$T_1 = T_2 + F \quad \cdots\cdots (2-2)$$

由（2－1）式中知線的加速度，只受沿著線方向的力如（T_1，T_2，F）所影響，而與加於線的正壓力∫dN無關，此稱爲「切線力定理」，假如不改變 T_1，T_2，F及m的大小而只改變C，D的位置及線端A，B的方向，則仍然得到相同的加速度 a_t，亦即可將圖2－2a的線，作成一直線如圖2－3所示，因爲∫dN對線之加速度無影響，則無需把∫dN顯示在圖上，將圖2－2a改成圖2－3，其位置雖然改變，但其作用相同，我們稱爲「線位置撓曲」，圖2－1之空間與圖2－3之空間，可互稱爲「撓性空間」。

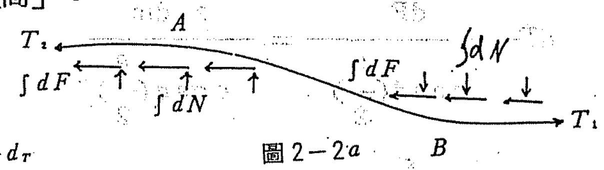


圖2－2a

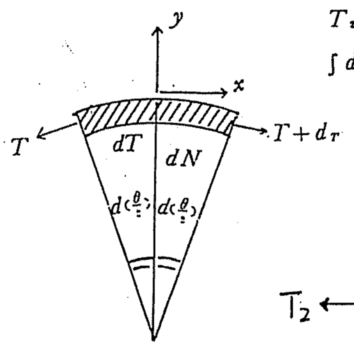


圖2－2b

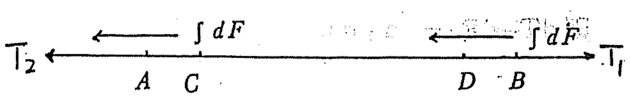


圖2－3

三、撓性空間和線撓性係數

如圖3－1所示，一個二級塔輪以固定之O軸作轉動，懸有物體的A，B各繞不同的半徑 r_1 及 r_2 滑輪及線均假定爲無質量，物體C的質量爲 m_1，物體D的質量爲 m_2，由此我們將導出「位移撓性係數」，「速度撓性係數」，「力量撓性係數」及「質量撓性係數」之觀念。

設 T_1 表示線A的張力

T_2 表示線B的張力

a_1 表示物體C的加速度

a_2 表示物體D的加速度

F_2 表示外力

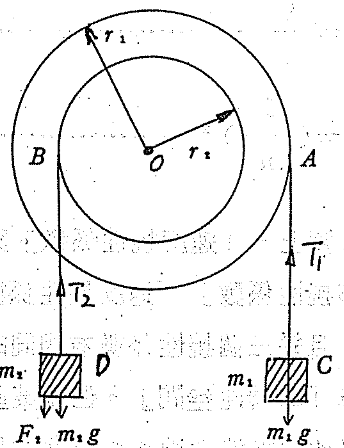


圖3－1

由圖3－1解之

$$m_1a_1=m_1g-T_1\cdots(3-1a)$$

$$m_2a_2=T_2-m_2g-F_2\cdots(3-1b)$$

$$a_2=\left(\frac{r_2}{r_1}\right)a_1\cdots(3-1c)$$

$$T_1=\left(\frac{r_1}{r_2}\right)T_2\cdots(3-1d)$$

解式(3－1a)至(3－1d)

$$得\ a_1=\frac{m_1g-m_2\left(\frac{r_2}{r_1}\right)g-F_2\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}{m_1+m_2\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2}\cdots\cdots(3-2)$$

$$令\ \frac{r_1}{r_2}=n$$

$$則\ a_1=\frac{m_1g-\frac{1}{n}m_2g-\frac{1}{n}F_2}{m_1+\frac{1}{n^2}m_2}\cdots\cdots(3-3)$$

$$a_2 = \frac{1}{n} a_1 \cdots\cdots (3-4)$$

參考式（3－3）及（3－4），我們選擇線A及物體C之邊為空間，訂為「標準空間」，（亦可選另外一邊為標準空間），而n稱為線B及物體D對標準空間之「位移撓性係數」或「速度撓性係數」或「切線加速度撓性係數」。因此我們定義「位移（或速度或切線加速度）撓性係數」為：標準空間的位移（或速度或切線加速度）與另一空間的位移（或速度或切線加速度）之比。再由式（3－2），導出「力量撓性係數」α_f 和「質量撓性係數」α_m。

$$\alpha_f = \frac{1}{n} \cdots\cdots (3-5)$$

$$\alpha_m = \left(\frac{1}{n}\right)^2 \cdots\cdots (3-6)$$

事實上，「速度撓性係數」與「切線加速度撓性係數」是不同的。在某些空間「位移撓性係數」「速度撓性係數」和「切線加速度撓性係數」都是系統機械構的函數，且這三個撓性係數有相同的意義，統稱為「長度撓性係數」，這種撓性空間，稱為「單撓性空間」。但在某些空間，撓性係數也是速度的函數，其速度的撓性係數與切線加速度撓性係數往往是不相同的，這種撓性空間稱為「雙撓性空間」。

首先我們來討論「單撓性空間」，將圖3－1之空間撓曲為圖3－2之空間，亦即是選擇線A及物體C為標準空間，而將m_2的速度及加速度放大至n倍，力量F_2縮小至$\frac{1}{n}$倍，質量m_2縮小至$\left(\frac{1}{n}\right)^2$倍，如圖3－2所示，假想兩物體是由剛性的無質量的介體所連結，因標準空間與被撓曲後的空間有相同的速度，我們稱此種連結為「同步連結」。由「切線力定理」知，垂直於運動方向的外力，出現在撓曲圖上是無意義的。

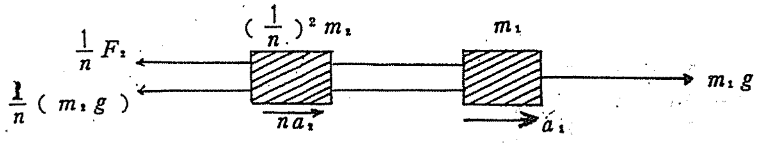


圖3－2

撓曲力量F，撓曲質量M與標準空間的切線加速度a得其關係爲$F=Ma$，當撓性係數不隨時間改變，且無外力作用時，撓性係數也是遵守動量守恒定理，從撓曲圖上和$F=Ma$，我們亦可求出與式（3－3）相同的結果，

$$\alpha_1=\frac{m_1 g-\frac{1}{n}F_2-\frac{1}{n}m_2 g}{m_1+(\frac{1}{n})^2 m_2}$$

$$\alpha_2=\frac{1}{n}\alpha_1$$

由上述，可知圖3－2不僅位置受撓曲，且其位移，質量皆受撓曲。

設動量$L=mV$（V爲速度），我們將導出「線動量撓性係數」α_L，

$$\alpha_L=\alpha_m\cdot n=(\frac{1}{n})^2\cdot n=\frac{1}{n}$$

$$\therefore\quad \alpha_L=\frac{1}{n}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3-7)$$

設能量$E=\frac{1}{2}mV^2$，由此導出「動能撓性係數」α_E，

$$\alpha_E=\alpha_m\cdot n^2=(\frac{1}{n})^2\cdot n^2=1$$

$$\therefore\quad \alpha_E=1\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3-8)$$

或$E=F\cdot S$（S爲F力量之線位移）

$$_E=\alpha_f\cdot n=(\frac{1}{n})\cdot n=1$$

≫應用《

考慮圖3－3之例題，設A，B爲兩無質量之滑輪，線繞過滑輪A及B，而一端固定於O點，C，D物體質量各爲m_1，m_2假設原來都在速度等於零之狀態求(1)加速度(2)t_1秒鐘後之速度(3)在t_1秒鐘後，物體D與質量m_3的物體H（原來在靜止狀態）相碰撞，求撞擊之速度。假設爲中心直接撞擊（Central and direct Impact）及完全塑性撞擊，在撞擊後物體C的速度仍然兩倍於物體D。(4)如問題(3)但非完全塑性撞擊，撞擊後物體H之速度爲V_3 (5)t_3秒鐘後來撞擊

前的動能。

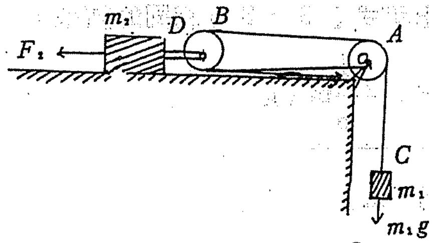


圖 3－3

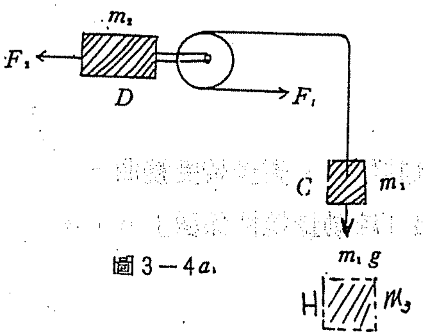


圖3－4a

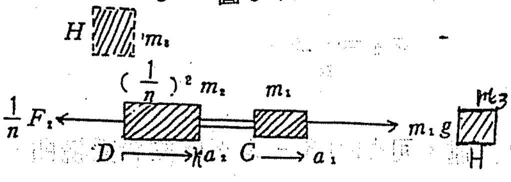


圖3－4b

≫解《

圖3－4a之自由體圖（Free boty diagram）上，可以不顯示垂直於運動方向的外力。選擇物體C作爲標準空間，由系統的機構結構，很明顯的可知，物體D的速度或加速爲物體C的一半，因此物體D的長度撓性係數 n＝2，線之一端0點，固定不動，有無限大的長度撓性係數（n＝∞）和等於零的力量撓性係數（$\alpha_f=\frac{1}{n}=\frac{1}{\infty}=0$），故作用於此點之外力 F_3 經撓曲後等於零。圖3－4b爲圖3－4a之撓性空間圖。

(1)由撓曲圖圖3－4b可立刻求出物體C的速度 a_1，

$$a_1=\frac{m_1 g-\frac{1}{2}F_2}{m_1+\frac{1}{4}m_2}\quad\left[\because \alpha_f=\frac{1}{n}=\frac{1}{2},\quad \alpha_m=(\frac{1}{n})^2=(\frac{1}{2})^2=\frac{1}{4}\right]$$

$$a_2=\frac{1}{2}a_1=\frac{1}{2}\,\frac{m_1 g-\frac{1}{2}F_2}{m_1+\frac{1}{4}m_2}\qquad\left[\because a_2=\frac{1}{n}a_1\right]$$

(2) t_1 秒鐘後撓曲係數之動量 $(m_1 g-\frac{1}{2}F_2)t_1$。以 V_1 表示物體C之速度，V_2 表示物體D之實際速度，根據動量原理 $F\triangle t=m\triangle V$ 則V則：

$$(m_1 g-\frac{1}{2}F_2)t_1=(m_1+\frac{1}{4}m_2)V_1$$

$$V_1=\frac{(m_1 g-\frac{1}{2}F_2)t_1}{m_1+\frac{1}{4}m_2}$$

$$V_2=\frac{1}{2}V_1=\frac{1}{2}\ \frac{(m_1 g-\frac{1}{2}F_2)t_1}{m_1+\frac{1}{4}m_2}$$

在未解問題(3)之前，我們再介紹「系統關係定理」，所謂「系統關係定理」可定義為：當兩互相碰撞的系統，其撓性系數相同於完全塑性碰撞後的值；而動量的正，負以完全塑性碰撞後之方向為正。如圖3－3由物體H組成的系統及由物D及C組成的系統在碰撞前其撓性系統之動量為 $(m_1 g-\frac{1}{2}F_2)t_1$。依「系統關係定理」H物體的長度撓性係數為 $n=2$，撞擊後撓性系統之質量為 $m_1+(\frac{1}{n})^2 m_2+(\frac{1}{n})^2 m_3=m_1+(\frac{1}{2})^2 m_2+(\frac{1}{2})^2 m_3=m_1+\frac{1}{4}m_2+\frac{1}{4}m_3$，我們立刻可求出撞擊後物體C之速度 V_1'，

$$V_1'=\frac{(m_1 g-\frac{1}{2}F_2)t_1}{m_1+\frac{1}{4}m_2+\frac{1}{4}m_3}$$

若不應用「撓性空間原理」，則其計算步驟較煩雜，如下列所解：

L表示物體C撞擊前後之動量差

n為物體C與D之速度比，即為撓性係數

V' 表示撞擊後之速度

物體D與H之動量，撞擊前後的差應為nL

$$V_1' = nV_2',\quad V_1' = \frac{m_1V_1 - L}{m_1},\quad V_2' = \frac{m_2V_2 + nL}{m_2 + m_3}$$

故 $$\frac{m_1V_1 - L}{m_1} = n\frac{m_2V_1\left(\frac{1}{n}\right) + nL}{m_2 + m_3} = \frac{m_2V_1 + n^2L}{m_2 + m_3}$$

$$L = \frac{m_1m_3}{n^2m_1 + m_2 + m_3}V_1$$

$$V_1' = \frac{m_1V_1 - L}{m_1} = \frac{\frac{1}{n^2}m_2 + m_1}{\frac{1}{n^2}(m_2 + m_3) + m_1}V_1$$

以 $n = 2$，$V_1 = \dfrac{\left(m_1g - \frac{1}{2}F_2\right)t_1}{m_1 + \frac{1}{4}m_2}$ 代入上式

得 $$V_1' = \frac{\left(m_1g - \frac{1}{2}F_2\right)t_1}{m_1 + \frac{1}{4}m_2 + \frac{1}{4}m_3}$$

其結果與使用「撓性空間原理」所計算得之結果相同。

(3) 以 L_3 表示撞擊後物體H之撓性動量

$$L_3 = \frac{1}{n}(m_3V_3) = \frac{1}{2}m_3V_3$$

或 $$L_3 = \left(\frac{1}{n^2}m_3\right)(nV_2) = \frac{1}{n}m_3V_3 = \frac{1}{2}m_3V_3$$

故 $$V_1' = \frac{\left(m_1g - \frac{1}{2}F_2\right)t_1 - \frac{1}{2}m_3V_3}{m_1 + \frac{1}{4}m_2}$$

雖然物體C與D分別運動在水平方向和垂直方向，他們的實際動量方向是不相同的，但應用「撓性空間原理」可將動量方向經撓曲後，轉變在同一直線方向，而以代

數和或差運算，此爲「撓性空間原理」的特徵之一。

(5) 既然動能撓性係數 $\alpha_E = 1$，故可直接求出未碰撞前的系統動能 E，由 $E = \frac{1}{2} MV^2$，則

$$E = \frac{1}{2}\left(m_1 + \frac{1}{4}m_2\right)\left[\frac{\left(m_1 g - \frac{1}{2}F_2\right)t_1}{m_1 + \frac{1}{4}m_2}\right]^2 = \frac{1}{2}\,\frac{\left(m_1 g - \frac{1}{2}F_2\right)^2 t_1^2}{m_1 + \frac{1}{4}m_2}$$

爲了熟悉撓性空間原理的應用，我們以另一方法求動能 E 首先求出物體 C 之位移 S，

$$S = \frac{1}{2}V_1 t_1 = \frac{1}{2}\,\frac{\left(m_1 g - \frac{1}{2}F_2\right)t_1^2}{m_1 + \frac{1}{4}m_2}$$

$$E = (\Sigma F)S = \left(m_1 g - \frac{1}{2}F_2\right)S = \frac{1}{2}\,\frac{\left(m_1 g - \frac{1}{2}F_2\right)^2 t_1^2}{m_1 + \frac{1}{4}m_2}$$

≫例《

考慮圖 3 － 5 a 之滑輪系統，兩滑輪都可以固定軸轉動，滑輪 D 有兩個半徑，滑輪及線都假設爲無質量。〔解〕以物體 A 爲標準空間，圖 3 － 5 b 爲此滑輪系統之撓曲圖，由此很容易發現：

$$n_2 = 1 \quad , \quad n_1 = \frac{r_3}{r_1}$$

以 a_3 表示物體 A 之加速度，因此

$$a_3 = \frac{m_3 g - m_2 g - \left(\frac{r_1}{r_3}\right)m_1 g - \left(\frac{r_1}{r_3}\right)F_1}{m_3 + m_2 + \left(\frac{r_1}{r_3}\right)^2 m_1}$$

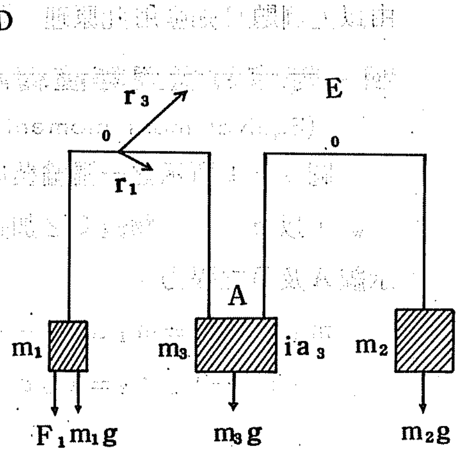


圖 3 — 5a

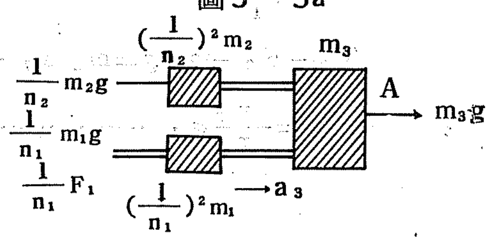


圖 3 — 5b

≫例《

考慮圖 3－6 a 之問題。物體 A 和物體 B 由兩無質量的剛性桿用銷連結。D銷固定不動。物體 A 可沿水平溝槽滑動，物體 A 及 B 原係靜止狀態，物體 C 之速度爲水平方向 v_3。物體 C 與物體 A 發生碰撞，求碰撞後物體 A 之速度 V_1'。
假設完全塑性碰撞，忽略摩擦力。

〔解〕：選擇 A 爲標準空間，畫撓曲圖如圖 3－6 b，碰撞前撓曲動量爲 $m_3 v_2$，碰撞後物體 A 之速度 v_1' 表示，則

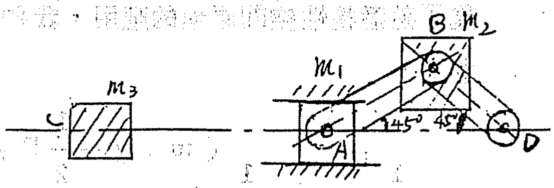


圖 3－6 a

$$v_1'\left(m_1+\frac{1}{n^2}m_2+m_3\right)=m_3 v_3$$

$$v_1'=\frac{m_3 v_3}{m_1+\frac{1}{n^2}m_2+m_3}$$

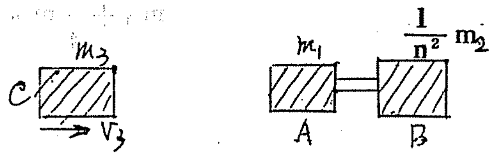


圖 3－6 b

由速度圖3－6C，$n=\frac{v_A}{v_B}=v_2$，n值代入 v_1

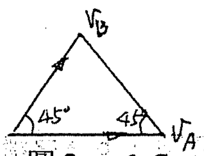


圖 3－6 C

得 $$V'=\frac{m_3 v_3}{m_1+\frac{1}{2}m_2+m_3}$$

由以上例題可知應用此原理，很容易即可求出所需之解。

四、等值質量與等值轉動慣量

(Equival mass moment of Inertia.)

圖 4－1 所示之一滑輪裝置，滑輪具有兩半徑，可以軸 O 作轉動；其轉動慣量 I_w，以 a_1 表示物體 C 之加速度，a_2 表示物體 D 之加速度，T_1 及 T_2 分別表示線 A 及 B 之張力，

$$m_1 g-T_1=m_1 a \cdots\cdots (4-1a)$$

$$T_1 r_1-T_2 r_2=I_w \alpha \cdots\cdots (4-1b)$$

$$\alpha=\frac{a_1}{r_1} \cdots\cdots (4-1c)$$

$$T_2-F_2-m_2 g=m_2 a_2 \cdots\cdots (4-1d)$$

$$a_2=\frac{r_2}{r_1}a_1 \cdots\cdots (4-1e)$$

解上式得：

$$\alpha=\frac{m_1 g r_1 - F_2 r_2 - m_2 g r_2}{I_w + m_1 r_1{}^2 + m_2 r_2{}^2} \cdots\cdots\cdots\cdots (4-2)$$

$$a_1=\frac{m_1 g - F_2 \dfrac{r_2}{r_1} - m_2 g \dfrac{r_2}{r_1}}{\dfrac{I_w}{r_1{}^2} + m_1 + m_2 \left(\dfrac{r_2}{r_1}\right)^2} \cdots\cdots\cdots\cdots (4-3)$$

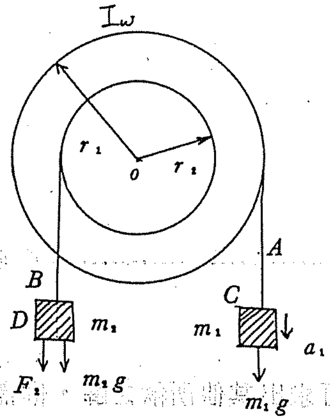


圖4－1

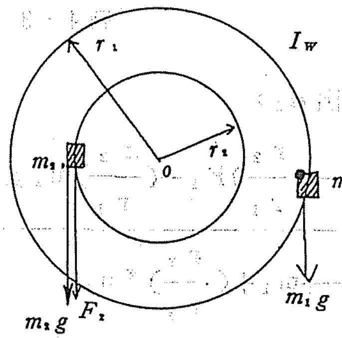


圖4－2

在式（4－2）中，$m_1 r_1{}^2$ 和$m_2 r_2{}^2$ 我們分別稱為質量$m_1 m_2$的等值轉動慣量，亦即假想m_1，m_2分別附着在半徑 r_1 及 r_2 的地方，其等值圖如圖4－2應注意的是此等值圖是瞬時的，由此等值圖，可知整個系統對O點有一力矩M_o存在。

$$M_0 = m_1 g r_1 - F_2 r_2 - m_2 g r_2$$

而整個系統之等值轉動慣量為 I

$I = I_w + m_1 r_1{}^2 + m_2 r_2{}^2$ ，因此；

$$\alpha=\frac{M_0}{I}=\frac{m_1 g r_1 - F_2 r_2 - m_2 g r_2}{I_w + m_1 r_1{}^2 + m_2 r_2{}^2} \cdots\cdots\cdots\cdots (4-4)$$

注意式（4－4）與（4－2）相同

在式（4－3）中，$\dfrac{I_w}{r_1{}^2}$這項被稱為 I_w 的等質質量，我們可想像具有質量$\dfrac{I_w}{r_1{}^2}$

之物體在半徑 r_1 地方與半徑 r_2 地方有同樣的速度。現在我們選擇物體C爲標準空間；然後，想像的物體便有長度撓性係數 n＝1，而物體D的長度撓性係數 $n=\frac{r_1}{r_2}$，由此我們可畫圖 4 - 1 系統的「等值和撓性複合圖」，如圖 4 - 3 所示，

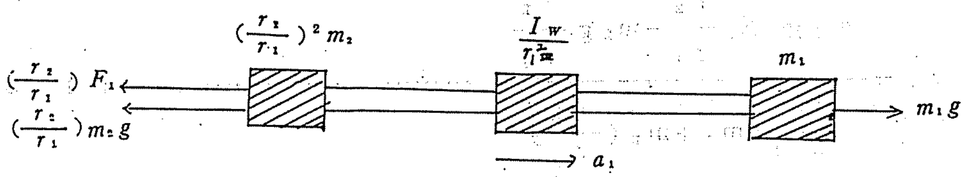


圖 4 - 3

由此圖可立即求出 a_1：

$$a_1=\frac{m_1 g-(\frac{r_2}{r_1})F_1-(\frac{r_2}{r_1})m_2 g}{\frac{I_w}{r_1^2}+m_1+(\frac{r_2}{r_1})^2 m_2} \quad \cdots\cdots (4-5)$$

所求之結果與式（ 4 - 3 ）相同，由 a_1 我們可求出其他所欲之解，惟需注意撓性係數之參與。

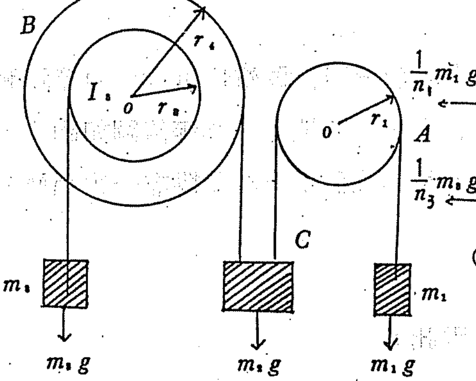


圖4－4a

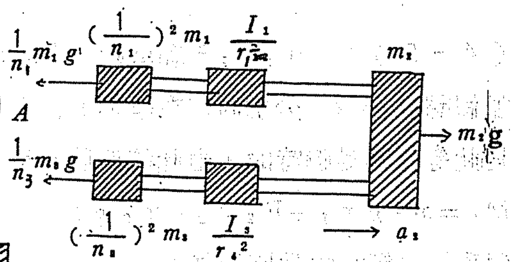


圖 4－4b

考慮圖 4 － 4 a 之問題，滑輪的質量不能被忽略，線假設爲無質量。應用此原理，圖 4 － 4 a 之滑輪系統可畫成等值和撓性複合圖如圖 4 － 4 b　$n_1=1$　$n_3=\frac{r_4}{r_3}$，由圖 4 － 4 b 我們立即可求出物體 C 之加速度 a_2，

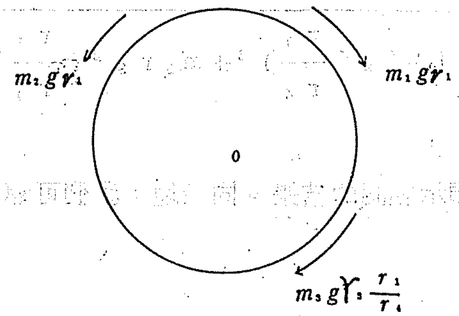
$$a_2=\frac{m_2g-m_1g-\frac{r_3}{r_4}m_3g}{m_2+\frac{I_1}{r_1^2}+m_1+\frac{I_3}{r_4^2}+\left(\frac{r_3}{r_4}\right)^2m_3}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(4-6)$$

五、角撓性空間

圖 4 － 4 a 之滑輪 A 及 B 可以轉動在其固定之中心軸上，我們將分別稱 A 及 B 滑輪爲角空間，在此指定滑輪 A 爲標準角空間，我們將定義角位移（或角速度或角加速度）撓性係數 n 爲標準角空間之角速度（或角加速度）與另一角空間之角速度（或角加速度）之比。其意義在使兩空間轉變爲相同之角速度或角加速度。類似於第 2 節所述之過程，我們可導出力矩撓性係數 $\alpha_{m0}=\frac{1}{n}$

轉動慣量撓性係數 $\alpha_1=\left(\frac{1}{n}\right)^2$

圖 4 － 4 a 之系統，以滑輪 A 爲標準角空間，可被轉變爲等值和撓性複合圖如圖 5 － 1 所示。



$$I_1+I_3\left(\frac{r_1}{r_4}\right)^2+m_1r_1^2+m_3r_3^2\left(\frac{r_1}{r_4}\right)^2+m_2r_1^2$$

圖5－1

在構造等值及撓性複合圖過程中，$m_2 g$ 可直接化為等值力矩 $m_2 g r_1$ 或先化為等值力矩 $m_2 g r_4$，然後再乘以力矩撓性係數 α_{m0}（$\alpha_{m0}=\frac{1}{n}$，角速度撓性係數 $n=\frac{r_4}{r_1}$，$\therefore \alpha_{m0}=\frac{r_1}{r_4}$ ）。同樣可得其等值力矩 $m_2 g r_1$。m_3 先化為等值轉動慣量 $m_3 r_3{}^2$，再化為「等值及撓性複合轉動慣量」亦即 $m_3 r_3{}^2$ 乘以轉動慣量撓性係數 α_1，因此 m_3 之撓性及等值複合轉動慣量為 $m_3 r_3{}^2(\frac{r_1}{r_4})^2$。

以 α_1 表示滑輪A之角加速度，然後從圖5－1之等值及撓性複合圖可以立即求出 α_1，

$$\Sigma M = m_2 g r_1 - m_1 g r_1 - m_3 g r_3(\frac{r_1}{r_4})$$

$$\Sigma I = I_1 + m_1 r_1{}^2 + I_3(\frac{r_1}{r_4})^2 + m_3 r_3(\frac{r_1}{r_4})^2$$

$$\alpha_1 = \frac{\Sigma M}{\Sigma I} = \frac{m_2 g r_1 - m_1 g r_1 - m_3 g r_3(\frac{r_1}{r_4})}{I_1 + m_1 r_1{}^2 + I_3(\frac{r_1}{r_4})^2 + m_3 r_3{}^2(\frac{r_1}{r_4})^2 + m_2 r_1{}^2}$$

……………………（5－1）

我們亦可由（4－6）式中求出 α_1，

$$\alpha_1 = \frac{a_2}{r_1} = \frac{m_2 g r_1 - m_1 g r_1 - m_3 g r_3(\frac{r_1}{r_4})}{I_1 + m_1 r_1{}^2 + I_3(\frac{r_1}{r_4})^2 + m_3 r_3{}^2(\frac{r_1}{r_4})^2 + m_3 r_1{}^2}$$

……………………（5－2）

式（5－2）與式（5－1）顯示相同的結果。同樣地，我們可導出角動量撓性係數 α_{AL}， $\alpha_{AL}=\frac{1}{n}$

≫應用《

考慮圖5－2a之問題，鏈輪 G_1，G_2，G_3，及 G_4 各具有轉動慣量 I_1，I_2，I_3，及 I_4。鏈條 C_1 連結 G_1 與 G_2，鏈條 C_2 連結 G_3 與 G_4，鏈條 C_1 及 C_2 各具有質量 m_1 及 m_2 各鏈輪可在軸上轉動。鏈輪 G_2 及 G_3 是用一套離合器連結，在離合器未連結前，鏈輪 G_2 與 G_3 各互不作用，連結後此兩鏈輪應以等角速度轉動在B軸上，假設在未連結前鏈輪 G_1 的角速度為順時鐘方向 α_1，鏈輪 G_3 的角速度為反時鐘方向 α_3 求突然連接後鏈輪 G_1 之角速度 α_1，忽略摩擦力的損失。

≫解《

撓性空間原理的最大特點，是使運動在不同方向的物體，經撓曲運動在同一直線方向。當離合器連結後，雖然鏈輪G_2與G_3有相同的角速度，但鏈條的速度是不同的。參考第二節所述的「系統關係定理」，我們可發現速度撓性係數$n=\frac{r_2}{r_3}$，我們畫撓性及等值複合圖於圖5-2b；

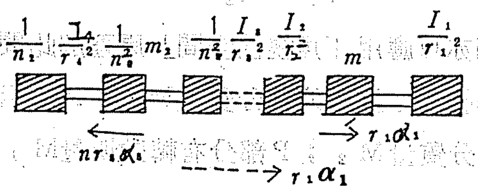


圖5-2b

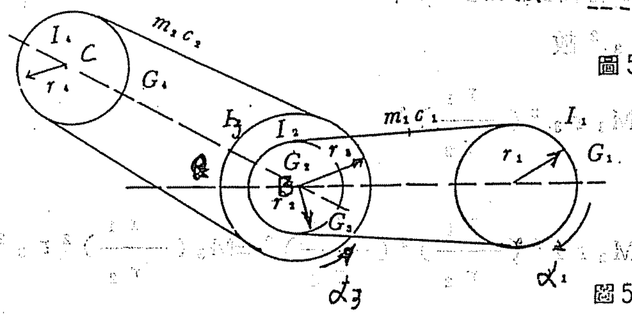


圖5-2a

在未連結前之撓性動量是：

$$L=r_1\alpha_1\left(\frac{I_1}{r_1^2}+\frac{I_2}{r_2^2}+m_1\right)-\frac{1}{n}r_3\alpha_3\left(\frac{r_3}{r_3^2}+\frac{I_4}{r_4^2}+m_2\right)$$

連結後之撓性動量是：

$$L'=r_1\alpha'\left[\left(\frac{I_1}{r_1^2}+\frac{I_2}{r_2^2}+m_1\right)+\frac{1}{n^2}\left(\frac{I_3}{r_3^2}+\frac{I_4}{r_4^2}+m_3\right)\right]$$

$L=L'$　故

$$\alpha' = \frac{1}{r_1}\left[\frac{r_1\alpha_1\left(\frac{I_1}{r_1^2}+\frac{I_2}{r_2^2}+m_1\right)-\frac{1}{n}r_3\alpha_3\left(\frac{I_3}{r_3^2}+\frac{I_4}{r_4^2}+m_2\right)}{\left(\frac{I_1}{r_1^2}+\frac{I_2}{r_2^2}+m_1\right)+\frac{1}{n^2}\left(\frac{I_3}{r_3^2}+\frac{I_4}{r_4^2}+m_2\right)}\right]$$

$$=\frac{1}{r_1}\left[\frac{r_1\alpha_1\left(\frac{I_1}{r_1^2}+\frac{I_2}{r_2^2}+m_1\right)-\frac{r_3}{r_2}r_3\alpha_3\left(\frac{I_3}{r_3^2}+\frac{I_4}{r_4^2}+m_2\right)}{\left(\frac{I_1}{r_1^2}+\frac{I_2}{r_2^2}+m_1\right)+\left(\frac{r_3}{r_2}\right)^2\left(\frac{I_3}{r_3^2}+\frac{I_4}{r_4^2}+m_2\right)}\right]$$

我們亦可應用「角撓性空間」原理解此問題，鏈條G_2可被分成三部分，以P表示與鏈輪G_3接觸的部分質量M_1，R表示與鏈輪G_4接觸部分質量M_3，Q表示其餘部分質量M_2；P部分有轉動慣量$M_1r_3^2$，R部份有轉動慣量$M_3r_4^2$，Q部分有等值轉動慣量$M_2r_3^2$故

P部分有撓性轉動慣量$M_1r_3^2\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2$

R部分有撓性轉動慣量$M_3r_4^2\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2\left(\frac{r_3}{r_4}\right)^2=M_3\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2r_3^2$

Q部分有等值及撓性複合轉動慣量$M_3r_3^2\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2$

將此三部分加起來，我們有鏈條C_2的等值及撓性複合轉動慣量$m_2r_3^2\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2$，其餘過程同理，最後會得到相同的結果。

六、雙撓性空間

前面所討論的是單撓性空間，往下我們來討論雙撓性空間。雙撓性空間的撓性係數是速度的函數，非僅是機械構造的函數。在雙撓性空間，速度撓性係數是兩空間的速度比，而切線加速度撓性係數是兩空間的切線加速度之比，兩者有不同的大小。以n_v表示速度撓性係數，n_a表示切線加速度撓性係數，α_m表示質量撓性係數，α_f表示力量撓性係數，α_{KE}表示動能撓性係數，α_{mv}表示動量撓性係數；則其各係數有下列關係：

$$\alpha_f=\frac{1}{n_v} \quad \cdots\cdots\cdots (6-1)$$

$$\alpha_m = \frac{1}{n_v n_a} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (6-2)$$

$$\alpha_{KE} = \frac{1}{n_v n_a} n_v^2 \quad 〔動能＝質量×速度^2〕$$

$$\alpha_{KE} = \frac{n_v}{n_a} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (6-3)$$

$$\alpha_{mv} = \frac{1}{n_v n_a} n_v \quad 〔動量＝質量×速度〕$$

$$\alpha_{mv} = \frac{1}{n_a} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (6-4)$$

當n_v與n_a相同時式（6－1）至（6－4）將與單撓性空間有相同的關係，我們必需强調的是撓性空間原理所關係的加速度只有切線加速度，而與向心加速度無關。

考慮圖6－1 a之問題，水平外力F作用於圓盤中心，圓盤之質量爲m，轉動慣量爲I，半徑爲r，圓盤與地面無滑動情形，求圓盤中心的加速度a。

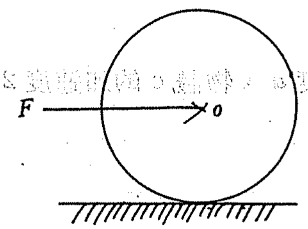


圖6－1 a

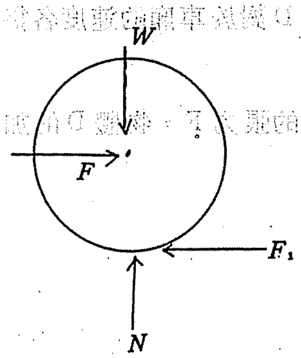


圖6－1 b

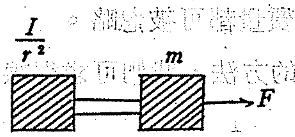


圖6－1 c

圓盤的運動可視爲兩種運動複合而成，一爲圓盤中心沿水平方向的運動，一爲繞圓盤中心的運動，其等值質量假設爲$\frac{1}{r_1^2}$；圓盤中心的直線速度假設爲v，然後圓盤角速度爲$\frac{V}{r}$，而繞圓盤中心轉動的等值質量之速度爲$\frac{Vr_1}{r}$，因此導出速度撓性係數$n = \frac{V}{\frac{Vr_1}{r}} = \frac{r}{r_1}$，如把V代換爲切線加速度$a$，同樣得到切線加速度撓性

係數 $n=\dfrac{r}{r_1}$，因此本題之等值質量 $\dfrac{I}{r_1^{\,2}}$ 之撓性為單撓性者。圖6－1 b為自由體圖圖6－1 c為等值及撓性複合圖，圓盤的重力W垂直於運動方向，故在自由體圖上無需顯現。圓盤與地面的接觸點A，其速度為零，但其切線加速度並非為零，而是隨著圓盤的速度而改變，故A點之撓性為雙撓性者，很幸運，切線加速度者撓性係數並未參與所要解決的問題內，否則問題會很複雜，既然A點的速度為零，故有無限大的速度撓性係數和等於零的力量撓性係數，故作用於A點的外力N和 F_1（經撓曲後亦變為零。等值質量 $\dfrac{I}{r_1^{\,2}}$ 在撓曲之後其撓性質量為

$$\frac{1}{n^2}\cdot\frac{I}{r_1^{\,2}}=\frac{I}{r^2}$$

當然，我們在實際解題，可直接假設等值質量為 $\dfrac{I}{r^2}$，且導出速度撓性係數 $n=1$，由撓曲圖圖5－1 c，可求得圓盤中心之加速度 $\boldsymbol{a}$：

$$\boldsymbol{a}=\frac{F}{m+\dfrac{I}{r^2}}$$

考慮圖6－2 a之問題，以等速前進的車廂內有一組滑輪裝置（類似圖3－3），在 $t=t_1$ 時，物體C，D對於車廂的速度各為 $2V'$，V'，摩擦力，滑輪與線的質量都可被忽略。

用其他的方法，我們可求得線的張力F，物體D的加速度 $\boldsymbol{a}$，物體c的加速度 $2\boldsymbol{a}$。

$$F=\frac{\dfrac{1}{4}m_1 m_2 g}{m_1+\dfrac{1}{4}m_2}$$

$$\boldsymbol{a}=\frac{\dfrac{1}{2}m_1 g}{m_1+\dfrac{1}{4}m_2} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots（6－5）$$

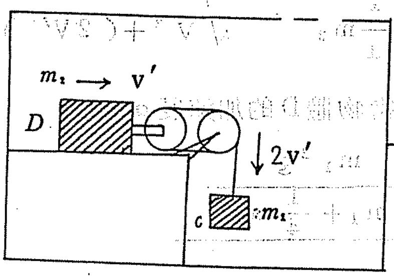


圖6－2a

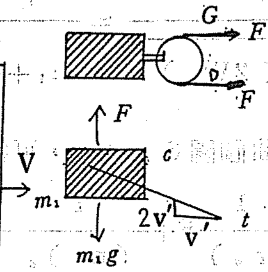


圖6-2b

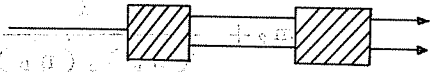


圖6－2c

現在我們要用已知的答案F，以雙撓性空間原理來解出物體D的加速度 a，以檢驗雙撓性原理。圖6－2 b是圖6－2 a的自由體圖，如同前述，垂直於運動路線的力量不顯示在圖上，直線t t是物體C在 $t=t_1$ 時之運動方向，當 $t=t_1$ 時，物體D的速度是 $V+V'$，G點的速度爲 $u+2V'$，O點的速度爲 V，物體C的速度爲 $\sqrt{V^2+(2V')^2}$，我們以物體D爲標準空間，各空間的速度撓性係數如下：

$$(n_v)_G=\frac{V+V'}{V+2V'}\quad ,(n_v)_D=\frac{V+V'}{V}\quad ,\quad (n_v)_c=\frac{V+V'}{\sqrt{V^2+(2V')^2}}$$

當物體D的加速度爲 a 時，物體C的加速度應爲 $2a$，但物體C沿切線t t的切線加速度應爲 $\dfrac{2a\,2V}{\sqrt{V^2+(2V')^2}}$，故物體C的切線加速度撓性係數 $(n_a)_c$，

$$(n_a)_c=\frac{\sqrt{V^2+(2V')^2}}{4V'}$$

依切線力定理，我們必需要把作用在物體C的外力F及 m_1g 投射在t t線上，因此沿切線方向作用在物體C的淨力爲

$$(m_1 g - F)\frac{2V'}{\sqrt{V^2+(2V')^2}} = \frac{m_1{}^2 g}{m_1+\frac{1}{4}m_2}\cdot\frac{2V'}{\sqrt{V^2+(2V')^2}}$$

由上面之討論，我們畫撓曲圖圖6－3 c，可得物體D的加速度 $\boldsymbol{a}$，

$$\boldsymbol{a} = \frac{\frac{1}{(n_v)_G}F+\frac{1}{(n_v)}F+\frac{1}{(n_v)_c}\frac{m_1{}^2 g}{m_1+\frac{1}{4}m_2}}{m_2+\frac{1}{(n_v)_c(n_D)_c}m_1}$$

$$= \frac{\left(\frac{V+2V'+V}{V+V'}\right)\frac{\frac{1}{4}m_1 m_2 g}{m_1+\frac{1}{4}m_2}+\frac{\sqrt{V^2+(2V')^2}}{V+V'}\cdot\frac{m_1{}^2 g}{m_1+\frac{1}{4}m^2}\cdot\frac{2V'}{\sqrt{V^2+(2V')^2}}}{m_2+\frac{\sqrt{V^2+(2V')^2\cdot 4V'}}{(V+V')\sqrt{(2V')^2+V^2}}m_1}$$

$$= \frac{\frac{\frac{1}{2}m_1 g}{m_1+\frac{1}{4}m_2}\left(m_2+\frac{4V'}{V+V'}m_1\right)}{m_2+\frac{4V'}{V+V'}m_1}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}m_1 g}{m_1+\frac{1}{4}m_2} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (6-6)$$

我們得知式（6－6）與（6－5）顯示相同的結果。

七、撓性空間原理應用於流體力學和電工學

考慮圖7－1之問題 L_{m1}，L_{mm}，L_{m2} 是流線，L_{mm} 是中心流線，假設流體爲穩流者不對外作功，且無摩擦。

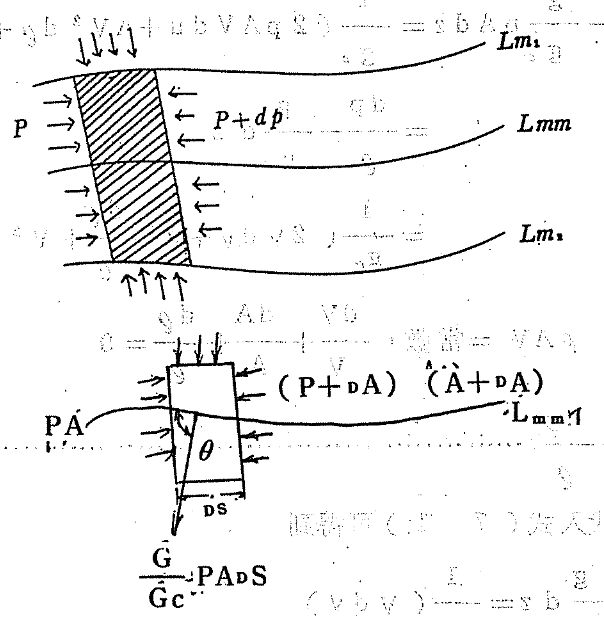


圖7－1

雖然流線爲彎曲者，但我們只考慮沿著流線方向之淨力，而不考慮與流線（中心流線）垂直之力。首先取一體積素，其兩邊截口各爲A及（A＋dA），垂直於中心流線，但其側面各與經過側面的流線平行。作用於體積素側面之壓力在中心流線方向之分力PdA。所有作用於體積素之外力在中心流線之分力ΣF

$$\Sigma F = PA - (P+dP)(A+dA) + PdA - \frac{g}{g_c}(pAdS\cos\theta)$$

$$= -AdP - \frac{g}{g_c}pAds$$

z：爲高度

$$動量變化\ \Sigma\triangle MV = \left(\frac{\varrho + d\varrho}{g_c}\right)(A+dA)(V+dV)^2 - \frac{\varrho}{g_c}AV^2$$

忽略二次微分項可得

$$\Sigma\triangle MV = \frac{1}{g_c}(2\varrho AVdV + AV^2 d\varrho + \varrho V^2 dA)$$

$$\Sigma F = \Sigma\triangle MV$$

$$-AdP-\frac{g}{g_c}\rho Adz=\frac{1}{g_c}(2\rho AVdu+AV^2d\rho+\rho V^2dA)$$

$$=\frac{dp}{\rho}-\frac{g}{g_c}dz$$

$$=\frac{1}{g_c}(2VdV+V^2\frac{d\rho}{\rho}+V^2\frac{dA}{A})\cdots\cdots(7-1)$$

由連續方程式　ρAV ＝常數，$\frac{dV}{V}+\frac{dA}{A}+\frac{d\rho}{\rho}=0$

$$\frac{dA}{A}=-\frac{dV}{V}-\frac{d\rho}{\rho}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(7-2)$$

式（７－２）代入式（７－１）可得到

$$-\frac{d\rho}{\rho}-\frac{g}{g_c}dz=\frac{1}{g_c}(VdV)$$

積分上式得

$$-\int_1^2\frac{d\rho}{\rho}-\frac{g}{g_c}\int_1^2dz=\frac{1}{g_c}\int_1^2VdV$$

$$\int_1^2\frac{d\rho}{\rho}+\frac{g}{g_c}(z_2-z_1)+\frac{1}{2g_c}[V_2^2-V_1^2]=0\cdots\cdots\cdots(7-3)$$

設Ｑ表示熱傳遞；Ｓ表示熵；ｈ表示焓；Ｕ表示內能，在可逆過程時，

$$\delta Q=TdS=pd(\frac{1}{\rho})+dU$$

$$\delta Q=dh-\frac{1}{\rho}dP \qquad \frac{d\rho}{\rho}=dh-SQ$$

積分之，$\int_1^2\frac{dP}{\rho}=\int_1^2dh-\int\delta Q=(h_2-h_1)-Q\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(7-4)$

式（７－４）代入式（７－３）可得

$$(h_2-h_1)-Q+\frac{g}{g_c}(z_2-z_1)+\frac{1}{2g_c}(V_2^2-V_1^2)=0$$

$$(\frac{P_2}{\rho_2}-\frac{P_1}{\rho_1})+(U_2-U_1)+\frac{g}{g_c}(z_2-z_1)+\frac{1}{2g_c}(V_2^2-V_1^2)-Q$$

$= 0$ ……………………………………………………………………………（7－5）

式（7－5）與用能量守恒原理導出者相同。

我們將更進一步把撓性空間原理應用到電工學問題，我們把電壓對應前述之力量，電流對應到加速度，阻抗對應到質量，因此導出電壓撓性係數 α_{v0}，電流撓性係數 α_{cu}，阻抗撓性係數 α_{im}，電功率撓性係數 α_{pw}。在感應電路（如圖 7－2 a），其撓性係數之關係如下：

$$\alpha_{v0}=\frac{1}{\alpha_{cu}} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (7-6)$$

$$\alpha_{im}=\left(\frac{1}{\alpha_{cu}}\right)^2 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (7-7)$$

$$\alpha_{pw}=1 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (7-8)$$

考慮圖 7－2 a 之問題，仿前述之方法，把左邊之電路選擇爲標準電路，畫撓曲電路圖如圖 7－2 b，很明顯的，爲何各撓性係數，各有如式（7－6），（7－7），（7－8）之關係；當把A點與C點連接，B點與D點連接，我們把電流 I_2 放大至 α_{cu} 倍 $\alpha_{cu}=\frac{I_1}{I_2}$，並且把C點與D點之間的電壓縮小至 α_{v0} 倍，使得C點與D點的電壓差經撓曲後與C，D點間的電壓差相同且撓曲後的電流與標準電路者相同。既然電壓E，電流I，電阻R有如式（7－9）之關係，我們亦將有式（7－10）的關係，由式（7－10），而導出式（7－11）的關係。

$$E=IR \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (7-9)$$

$$\alpha_{v0}=\alpha_{cu}\alpha_{im} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (7-10)$$

$$\alpha_{im}=\frac{\alpha_{v0}}{\alpha_{cu}}=\frac{\frac{1}{\alpha_{cu}}}{\alpha_{cu}}=\left(\frac{1}{\alpha_{cu}}\right)^2$$

考慮圖 7－3 a 之問題，選擇A電路爲標準電路，而各撓性係數如下：

$$(\alpha_{cu})_B=\frac{I_1}{I_2}=n_2 \qquad \text{B：代表B電路}$$

$$(\alpha_{cu})_C=\frac{I_1}{I_3}=n_3 \qquad \text{C：代表C電路}$$

$$(\alpha_{im})_B=\left(\frac{1}{n_2}\right)^2$$

$$(\alpha_{im})c=\left(\frac{1}{n_3}\right)^2$$

我們畫撓曲電路圖於7－3 b；由圖得下列結果：

$$I_1=\frac{Ee^{st}}{R_1+\frac{1}{C_1s}+L_1s+\left(\frac{1}{n_3}\right)^2R_3+\left(\frac{1}{n_2}\right)^2\left(R_2+\frac{1}{C_2s}+L_2s\right)}$$

$$I_2=\frac{1}{n_2}I_1,\quad I_3=\frac{1}{n_3}I_1$$

$$V_{R2}=n_2\left[I_1\left(\frac{1}{n_2}\right)^2R_2\right]=\frac{1}{n_2}I_1R_2$$

功率 $P=EI_1e^{st}$

感應電路的撓性係數如式（7－9），（7－10）及（7－11）所示，但在直接連結的電路如圖7－4 a所示，則有如式（7－12），（7－13）及（7－14）之關係：

$$\alpha_{v0}=1 \quad\cdots\cdots(7-12)$$

$$\alpha_{im}=\frac{1}{\alpha_{cu}} \quad\cdots\cdots(7-13)$$

$$\alpha_{pw}=\alpha_{cu} \quad\cdots\cdots(7-14)$$

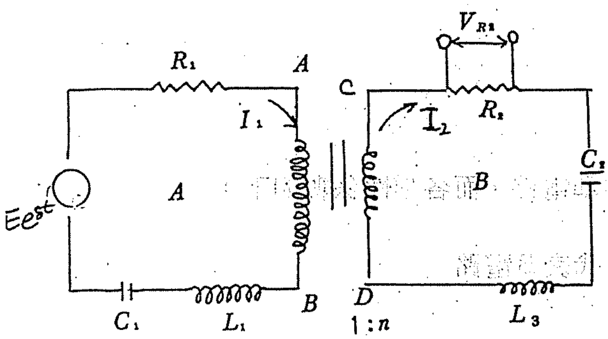


圖7－2 a

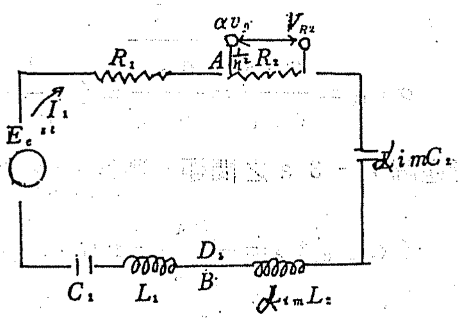


圖7－2 b

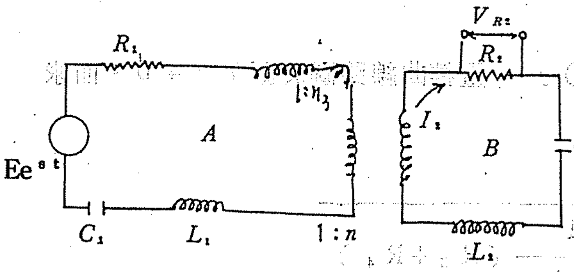


圖7－3 a

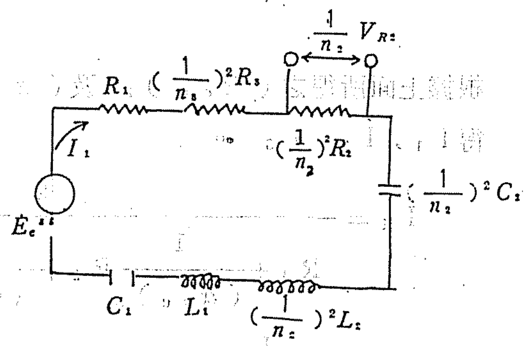


圖7－3 b

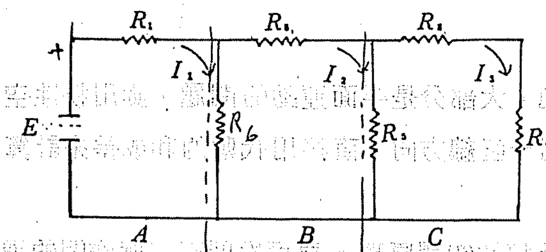


圖7－4 a

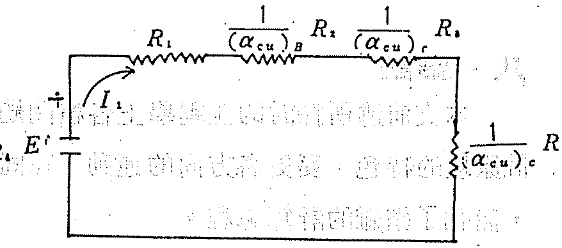


圖7－4 b

考慮圖7－4 a之問題，選擇A部分之電路作爲標準電路，則各撓性係數如下：

$$(\alpha_{cu})_3=\frac{I_2}{I_3}=\frac{R_3+R_4+R_5}{R_5}$$

$$(\alpha_{im})_3=\frac{1}{(\alpha_{cu})_3}=\frac{R_5}{R_3+R_4+R_5}$$

$$(\alpha_{cu})_B=\frac{I_1}{I_2}=\frac{R_6+R_2+(\alpha_{im})_3(R_3+R_4)}{R_6}$$

$$=\frac{(R_6+R_2)(R_3+R_4+R_5)+R_5(R_3+R_4)}{R_6(R_3+R_4+R_5)}$$

$$(\alpha_{cu})c=\frac{I_1}{I_3}=\frac{I_1}{I_2}\times\frac{I_2}{I_3}=(\alpha_{cu})_B(\alpha_{cu})_3$$

$$=\frac{(R_6+R_2)(R_3+R_4+R_5)+R_5(R_3+R_4)}{R_5R_6}$$

根據上面所得之$(\alpha_{cu})_B$及$(\alpha_{cu})_C$，畫撓曲線路圖於圖7－4b，而求得I_1，I_2，I_3。

$$I_1=\frac{E}{R_1+\frac{1}{(\alpha_{cu})_B}R_2+\frac{1}{(\alpha_{cu})_C}(R_3+R_4)}$$

$$I_2=\frac{I_1}{(\alpha_{cu})_B}$$

$$I_3=\frac{I_1}{(\alpha_{cu})_C}$$

八、結論

本文前述所探討的工程學上各種問題，大部分是平面運動的問題，應用撓性空間原理的特色，變更各方向的運動，在同一直線方向，直接用代數的和或差來計算，簡化了繁雜的計算過程。

切線力定理非只限於平面運動，因此撓性空間原理，更可推廣至三度空間的運動系統，使繁雜的問題運算，更容易簡化運算，此點不容置疑尚待再更進一步之研究。

參考資料

① Engineering Mechanics Volume II Dynamics Huang 6th Printing.

② An Introduction to Electrical Engineering Allen E. Durling.

③ Fluid Mechanics PAO.

④ Fluid Dynamics Daily.

⑤ General Physics Landau.