

# 達夫動力系統承受雙頻率激振的週期響應與混沌運動之分析

簡守謙

德霖技術學院機械系副教授

## 摘要

探討與分析達夫(Duffing)動力系統受雙頻率激振的分歧現象與混沌運動。首先以數值分析，在相同吸引盆地 (Basins of attraction)，穩態解的起始值是以基本週期交替出現之特性。其次以 Melnikov 解析方法，求取達夫動力受雙頻率激振時，週期運動與混沌響應的臨界參數值。取多個初始條件之分歧圖，能分辨頻率互鎖與類週期之響應，有出現週期三響應，並呈現週期倍增至混沌；配合以相圖、頻譜圖、Poincaré 切面圖、響應時序圖和 Lyapunov 指數，證明分歧圖在參數變化之穩態響應之型態。

**關鍵詞：**Melnikov 方法，分歧圖，雙頻率激振，混沌

## Periodic and Chaotic Responses the Duffing System with Two External Excitations

Shoou-Chian Jen

Department of Mechanical Engineering, De-Lin Institute of Technology

## ABSTRACT

Periodic and chaotic responses the Duffing system with two external excitations are investigated. First, the boundary of periodic and chaotic motion under the periodic perturbation is determined by using Melnikov's method. Second, using numerical integration, based on 4th order Runge-Kutta method is used to simulating Duffing system for various initial conditions and parameters. As bifurcation diagrams are plotted, frequency-locked oscillations with period-3 motions and cascades of period-doubling to chaos are found. Numerical simulations including homoclinic bifurcation surfaces, bifurcation diagrams, Poincaré maps, phase portraits, response waveforms, frequency spectra and maximum Lyapunov exponents are given to illustrate the theoretical analysis.

**Keywords:** Melnikov's method, bifurcation, two external excitations, chaos

## 壹、前言

探討並分析 Duffing 系統，利用數值模擬方法分析，受一外力激振的非線性系統，已被 Ueda 等[1-3] 先進探討得非常詳盡。Chen[4,5]、Dooren[6] 基本上解析 Duffing 方程式受一個外力激振，因系統出現反對稱解(多重解)，Chen 數值模擬法分析中只取一個初始條件無法表現多重解共存；Dooren 以吸子盆地圖判斷多重解，再取多個初始條件繪出多重解共存之分歧圖。Cheng 等[7]探討 SDOF 受摩擦力之雙頻率激振系統，在分析二頻率激振時頻率比值為簡單分數；文中取頻率比值為 4/17，數值模擬法分析過程採取 Poincaré 切面與單一初始條件，所繪出之分歧圖週期一為四點或十七點，其他週期響應為十七點之整倍數，將與混沌運動類似模糊一片而無法分辨。多數研究者於數值模擬法分析過程中，只取一個初始條件所繪出分歧圖將無法表現多重解。在頻率比值為更複雜分數甚至無理數時，其分歧圖將模糊模糊一片而無法完整表現，並分析多重解之現象。Moukam 等[8]分析 Duffing-Van der pol 受雙頻率激振系統之混沌控制，分析此系統時頻率比值亦為簡單分數；文中取頻率比值為 1/3，與單一頻率相似，數值模擬法分析過程採取 Poincaré 切面與單一初始條件，所繪出之分歧圖週期一為三點容易誤判為週期三響應。文中無分析頻率比值為更複雜分數甚至無理數之分歧圖。Kang 等[9-12]分析受多頻激振非線性系統，有 Duffing 系統、Van der pol、分斷線性系統等等。Kang 發現相同吸子盆地的穩態解起始值是以基本週期交替出現之特性。取多個初始條件，以基本週期切割之分歧圖，能分辨頻率互鎖與類週期之響應，並呈現週期倍增至混沌，然而缺少理論解析混沌響應的邊界條件。本文首先以數值分析，在相同吸子盆地 (Basins of attraction)，穩態解的起始值是以基本週期交替出現之特性。其次以 Melnikov 解析方法，求取達夫動力受雙頻率激振時，週期運動與混沌響應的臨界參數值。

## 貳、統制方程式

### 2.1 Duffing 系統與勢能函數

兩個勢井的 Duffing 系統受雙頻率激振方程式可表示為

$$\ddot{x} + \delta \dot{x} - a_1 x + a_3 x^3 = P_1 \cos(\nu_1 t) + P_2 \cos(\nu_2 t), \quad (1)$$

其中無因次量分別： $\delta$ 線性阻尼係數、 $a_1$ 線性勁度和 $a_3$ 非線性勁度、 $P_1$ 和 $P_2$ 是外激振的振幅、 $\nu_1$ 和 $\nu_2$ 是外激振的頻率。

方程式(1)改為狀態方程式為

$$\dot{x} = y, \quad (2a)$$

$$\dot{y} = a_1 x - a_3 x^3 + \varepsilon(\bar{P}_1 \cos(\nu_1 t) + \bar{P}_2 \cos(\nu_2 t) - \bar{\delta} y). \quad (2b)$$

假設 $\varepsilon=0$ ，方程式(2)則為非微擾系統，Hamiltonian系統的Hamiltonian函數( $H(x,y)$ )，可表示為

$$H(x, y) = \frac{1}{2} y^2 - \frac{1}{2} a_1 x^2 + \frac{1}{4} a_3 x^4. \quad (3)$$

勢能函數 $V(x)$ 為兩個勢井系統，可表示

$$V(x) = -\frac{1}{2} a_1 x^2 + \frac{1}{4} a_3 x^4. \quad (4)$$

## 2.2 數值方法

當系統受二個以上不同頻率激振，頻率比值分類為：當頻率 $\nu_1$ （週期為 $T_1 = 2\pi / \nu_1$ ）和 $\nu_2$ （週期為 $T_2 = 2\pi / \nu_2$ ）之比值為有理數（ $m_1 / m_2$ ），則發生頻率互鎖運動；當為週期運動時，以 $T_1$ 或 $T_2$ 時間切割 Poincaré 平面，分析 Poincaré 切面圖，則出現 $m_1$ 或 $m_2$ 的整倍數目值之點，但以基本週期 $T$ （ $T_1$ 和 $T_2$ 之最小公倍數）切割 Poincaré 平面，週期-n 運動在 Poincaré 切面圖有 $n$ 點。

當頻率比值為無理數，則出現類週期運動；以 $T_1$ 或 $T_2$ 時間切割 Poincaré 平面，分析 Poincaré 切面圖，則出現一條交錯封閉曲線，與混沌運動出現各點被限制於某些區域的特性不同；無法以基本週期（其值為無限大）切割 Poincaré 平面。然而，在相同吸子盆地，穩態解的起始點是以基本週期交替出現，週期-n 運動將對應有 $n$ 個起始點。取多個初始條件之分歧圖，能分辨頻率互鎖與類週期之響應，並呈現多重解之曲線。

採用四階次Runge-Kutta數值積分法，積分時間增量取為 $\Delta t = T / N$ ， $N$ 為基本週期的分割數，其範圍在200至600之間。Poincaré切面圖取超過100點，其分割的切面時間間隔為基本週期 $T$ 。頻譜圖和相圖取1000外力週期而且每一個外力週期分500點。分析吸子盆地圖分割初始條件空間的密度為 $101 \times 101$ 以上。

## 2.3 Melnikov函數

方程式(3)之同宿曲線(homoclinic orbit)可表示為

$$(x_0(t), y_0(t)) = \left( \sqrt{\frac{2a_1}{a_3}} \sec h(\sqrt{a_1}t), a_1 \sqrt{\frac{2}{a_3}} \sec h(\sqrt{a_1}t) \tanh(\sqrt{a_1}t) \right), \quad (5)$$

且 $(x_0(0), y_0(0)) = (\sqrt{2a_1/a_3}, 0)$ 。

同宿曲線之Melnikov函數( $M(t_0)$ )，可表示為

$$M(t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} \{y_0(t)((\bar{P}_1 \cos(\nu_1 t) + \bar{P}_2 \cos(\nu_2 t) - \bar{\delta}y_0(t))\} dt. \quad (6)$$

方程式(5)代入方程式(6)經過積分及簡化後，Melnikov函數可得為

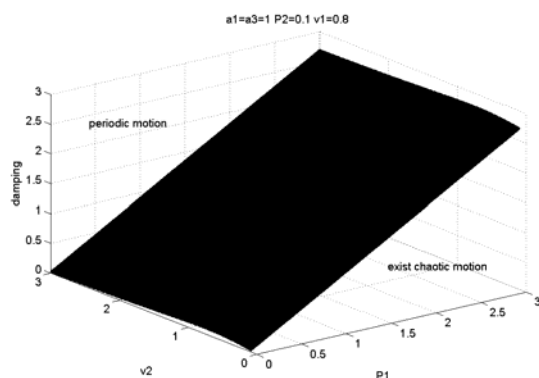
$$M(t_0) = -\frac{4\bar{\delta}\sqrt{a_1^3}}{3a_3} + \bar{P}_1 \nu_1 \sqrt{\frac{8}{a_3}} \frac{\sin(\nu_1 t_0)}{\cosh(\pi \nu_1 / 2\sqrt{a_1})} + \bar{P}_2 \nu_2 \sqrt{\frac{8}{a_3}} \frac{\sin(\nu_2 t_0)}{\cosh(\pi \nu_2 / 2\sqrt{a_1})}. \quad (7)$$

方程式(7)為同宿曲線之 Melnikov 函數，假設方程式(7)某些參數存在，使得 $M(\bar{t}_0) = 0$ 且 $\partial M(t_0) / \partial t_0|_{t_0=\bar{t}_0} \neq 0$ ，在 $\bar{t}_0 \in [0, T]$ ，其中 $T$ （稱為基本週期）為 $2\pi / \omega_1$ 與 $2\pi / \omega_2$ 之最小公倍數，則同宿曲線分歧將發生在某些參數成立；且當 $\varepsilon$ 足夠小時，存在穿越同宿曲線現象及混沌響應 [13]。

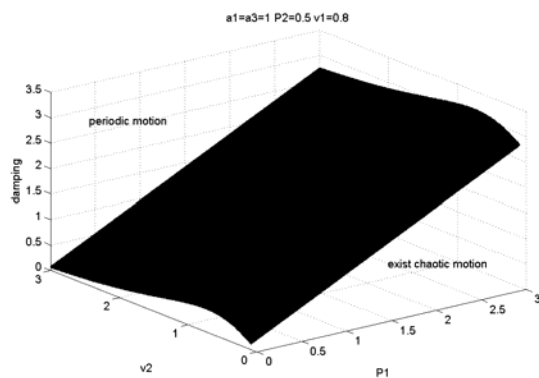
## 參、數值模擬

當 $\varepsilon=0.1$ 、 $a_1=1$ 、 $a_3=1$ 、 $\nu_1=0.8$ 、 $P_2$ 分別為0.1與0.5時；圖一(a、b)為方程式(7)同宿曲線的 Melnikov 函數之曲面圖；振幅( $P_1$ )、頻率( $\nu_2$ )、阻尼( $\delta$ )曲面圖中左上區域為週期響應，右下區域為

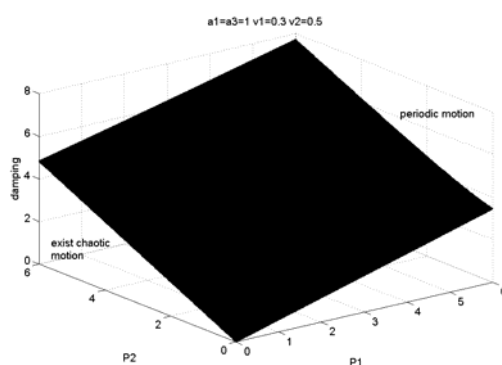
存在混沌響應，比較二圖顯示隨振幅( $P_2$ 或 $P_1$ )增加而混沌響應區域增加。在  $\varepsilon=0.1$ 、 $a_1=1$ 、 $a_3=1$ 、 $\nu_1=0.3$ 、 $\nu_2$  分別為 0.5 與 1.1 時；圖二(a、b)為同宿曲線的 Melnikov 函數之曲面圖；對應振幅( $P_1$ )、振幅( $P_2$ )、阻尼( $\delta$ )曲面圖，圖中右上區域為週期響應，左下區域為存在混沌響應。



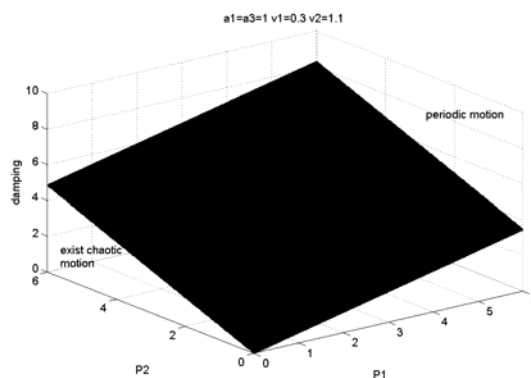
圖一 a 同宿分歧曲面圖； $P_2 = 0.1$ ，週期與混沌響應的臨界值曲面



圖一 b  $P_2 = 0.5$

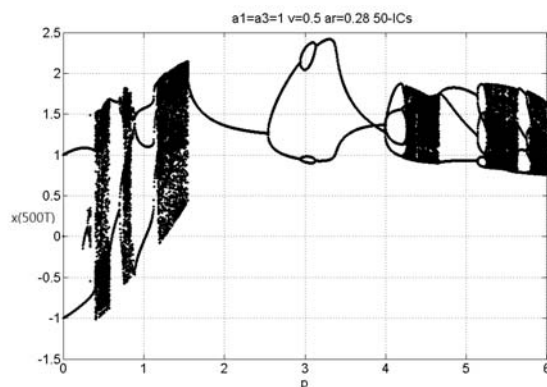


圖二 a 同宿分歧曲面圖； $\nu_2 = 0.5$ ，週期與混沌響應的臨界值曲面

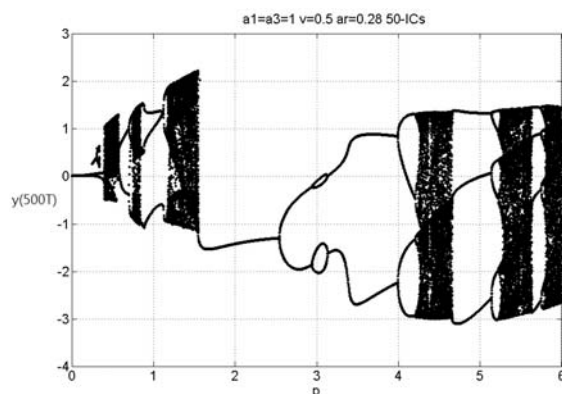


圖二 b  $v_2 = 1.1$

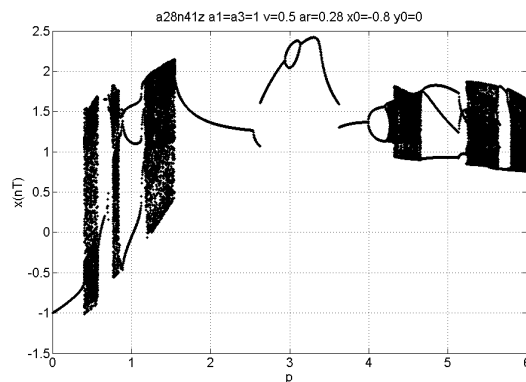
數值模擬方程式(1)，當一個外力頻率激振時，取 50 個初始條件，在  $a_1 = 1$ 、 $a_3 = 1$ 、 $v = 0.5$ 、 $\delta = 0.28$  時，圖三(a、b)為  $x(500T)$  與  $y(500T)$  對外力振幅分歧圖；呈現複雜曲線之分歧圖，表示有多重解之現象。當在  $P=0-0.32$  之間，出現兩個週期一響應共存；在  $P=1.52-2.51$  之間，出現單一週期一響應；隨振幅增加於  $P=2.51-4$  之間，分裂反對稱週期一或週期二響應共存，而後隨振幅增加週期倍增之反對稱解，合併進入混沌運動； $P=4.68-5.15$  之間，出現單一週期三響應，亦有隨振幅增加週期倍增之反對稱解，而合併進入混沌運動。取單一初始條件，圖四(a、b)為  $x(nT)$  與  $y(nT)$  對外力振幅分歧圖，配合圖三分析上述多解共存的區域與響應型態。



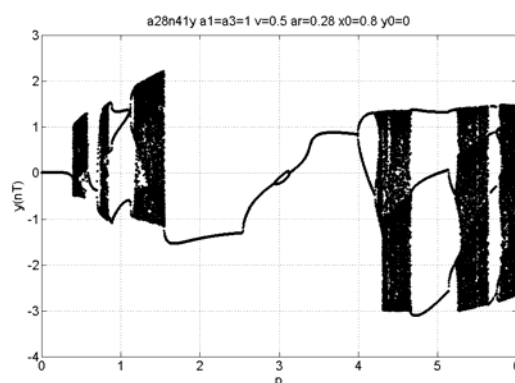
圖三 a  $x(500T)$  對振幅分歧圖；單一外力激振，取 50 個初始條件



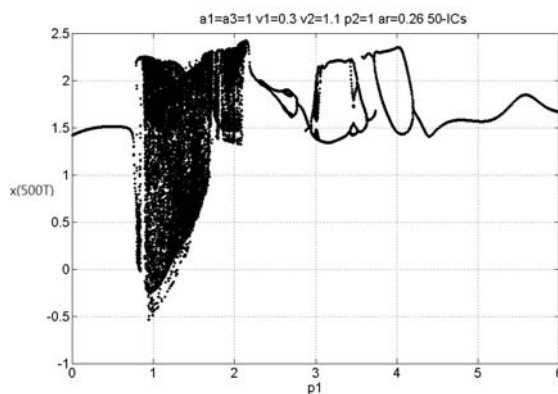
圖三 b  $y(500T)$  對振幅分歧圖



圖四 a  $x(nT)$ 對振幅分歧圖；單一外力激振且單一初始條件



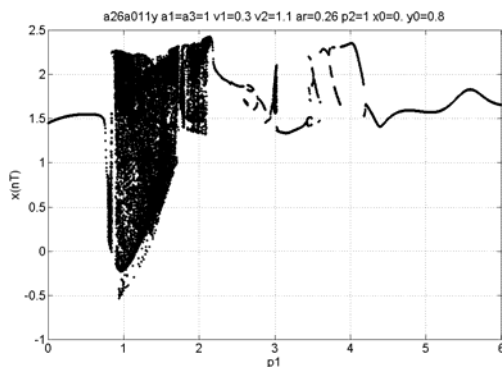
圖四 b  $y(nT)$ 對振幅分歧圖



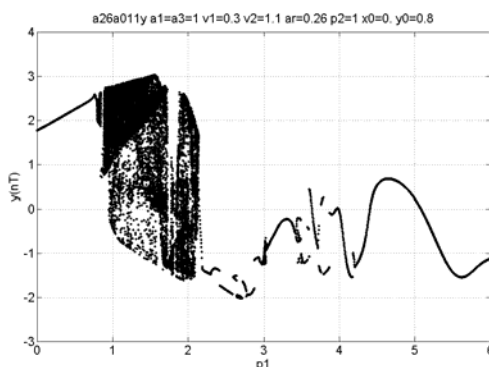
圖五  $x(500T)$ 對振幅( $P_1$ )分歧圖；雙頻率外力激振，取 50 個初始條件

當二個外力頻率激振，在  $a_1 = 1$ 、 $a_3 = 1$ 、 $v_1 = 0.3$ 、 $v_2 = 1.1$ 、 $P_2 = 1$ 、 $\delta = 0.26$  時，取 50 個初始條件，圖五為  $x(500T)$ 對外力振幅分歧圖；圖中顯示複雜之曲線，表示有多重解之現象。 $P_1 = 2.2-2.7$ 、 $2.9-3.65$ 、 $3.7-4.2$  三個區間，出現反對稱週期運動與混沌響應。圖六(a、b)為  $x(nT)$ 與  $y(nT)$ 對外力振幅分歧圖，其中  $T$  為基本週期，配合圖五分析上述多解共存的區域與響應型態。因為單一初始條件之分歧圖，出現斷裂曲線可為反對稱解的現象或多重解出現範圍。

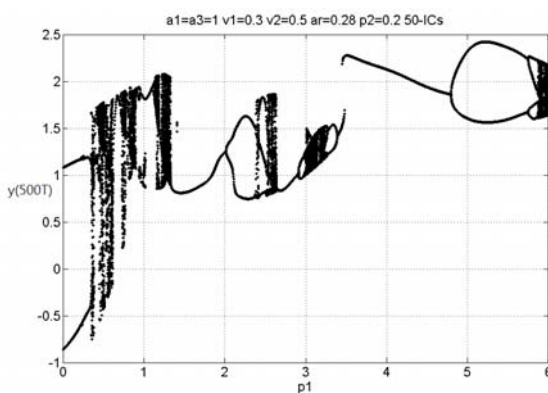
在  $a_1 = 1$ 、 $a_3 = 1$ 、 $\nu_1 = 0.3$ 、 $\nu_2 = 0.5$ 、 $P_2 = 0.2$ 、 $\delta = 0.28$  時，取 50 個初始條件，圖七為  $x(450T)$  對外力振幅( $P_1$ )分歧圖；配合單一初始條件(-0.8,1)之圖八分歧圖，有多重解之現象。圖七在振幅  $P_1 = 0-0.354$  之間，出現二個週期一響應共存； $P_1 = 0.54-0.894$ 、 $P_1 = 1.134-1.332$  之間，混沌響應出現。一族曲線  $P_1 = 1.332-2.012$  之間，出現週期一響應； $P_1 = 2.012-2.4$  之間，出現分裂為反對稱解之二個週期一響應共存； $P_1 = 2.4-2.64$  之間，出現週期三響應與混沌響應。 $P_1 = 2.64-3.456$  之間，出現以週期一響應、分裂為反對稱解之二個週期一響應共存、隨振幅增加出現以週期倍增反對稱解之二個週期響應共存，而進入混沌運動；又以隨振幅遞減，出現以週期一響應、分裂為反對稱解之二個週期一響應共存，出現以週期倍增反對稱解之二個週期響應共存，週期倍增而進入混沌運動。另一族曲線  $P_1 = 3.456-6$  之間，亦有出現以週期倍增反對稱解之二個週期響應共存，週期倍增而進入混沌運動。



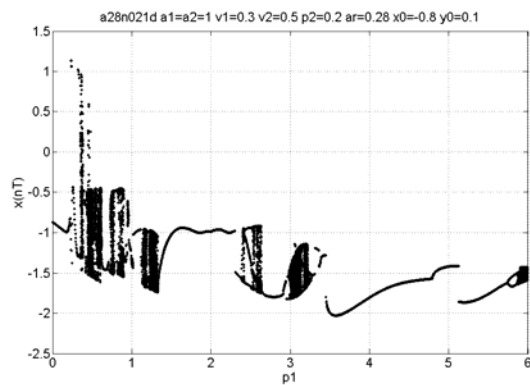
圖六 a  $x(nT)$  對振幅( $P_1$ )分歧圖；雙頻率外力激振，單一初始條件(0,0.8)



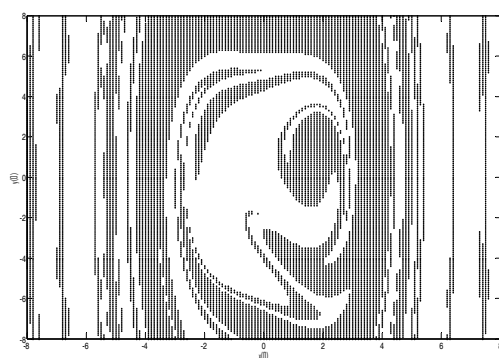
圖六 b  $y(nT)$  對振幅( $P_1$ )分歧圖



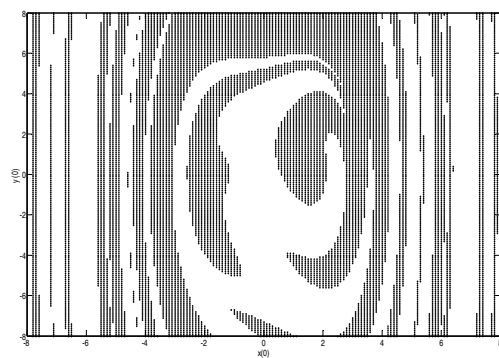
圖七  $x(500T)$  對振幅( $P_1$ )分歧圖；雙頻率外力激振，取 50 個初始條件



圖八  $x(nT)$ 對振幅( $P_1$ )分歧圖；雙頻率外力激振，單一初始條件(-0.8,1)



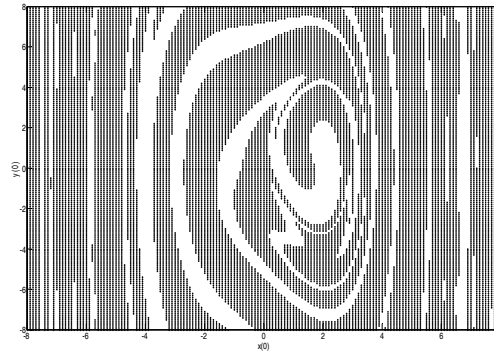
圖九 a 吸子盆地圖；振幅  $P=3$ ；反對稱解之週期二響應



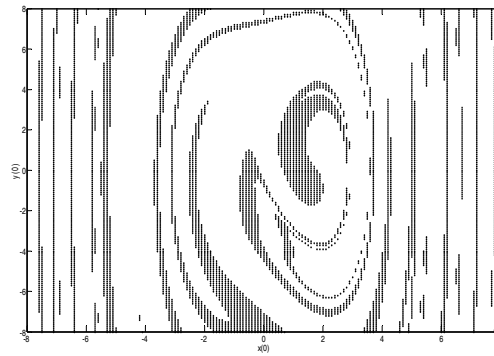
圖九 b 振幅  $P=3.5$ ，反對稱解之週期一響應

單一外力激振狀況下，取圖三反對稱響應區域之吸子盆地圖；圖九 a 為振幅  $P=3$  的吸子盆地圖，反對稱解之週期二響應；圖九 b 為振幅  $P=3.5$  的吸子盆地圖，反對稱解之週期一響應。雙外力激振狀況下，取圖五反對稱響應區域之吸子盆地圖；圖十(a、b)振幅  $P_1$  分別為 3.2 與 4 的吸子盆地圖，均是反對稱解之週期一響應。吸子盆地邊界都為平滑區線。

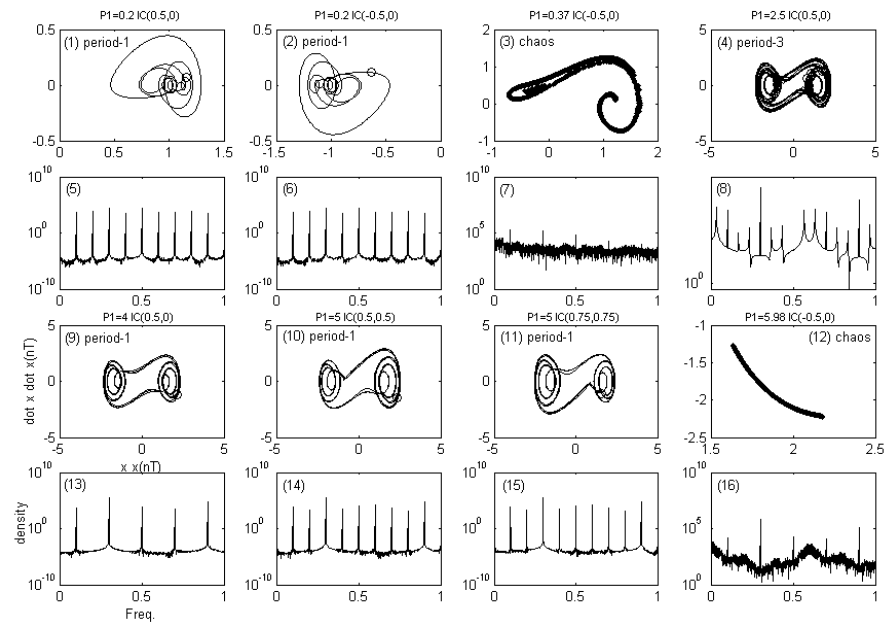




圖十 a 吸子盆地圖；振幅  $P_1=3.2$  反對稱解之二個週期一響應共存

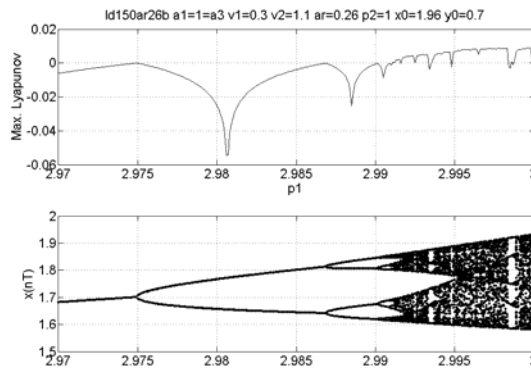


圖十 b 吸子盆地圖；振幅  $P_1=4$



圖十一 相圖、頻譜圖、Poincaré 切面圖

圖十一顯示相圖、頻譜圖、Poincarè 切面圖，當  $P_2 = 0.2$ 、 $\nu_1 = 1.1$ 、 $a_1 = 1$ 、 $a_3 = 1$ 、 $\delta = 0.2$ ；振幅  $P_1 = 0.2$ ，I.Cs(0.5,0)、(-0.5,0) 反對稱解之週期一響應共存；振幅  $P_1 = 0.37$  和 5.980 為混沌運動；在振幅  $P_1 = 2.5$  為週期三響應；在振幅  $P_1 = 4$  為週期一響應；在振幅  $P_1 = 5$ ，初始條件分別為 I.Cs(0.5,0.5)、(0.75,0.75) 反對稱解之週期一響應共存。圖十一比較圖七與圖八之分歧圖；當圖七與圖八的分歧圖中， $P_1$  分別為 0.2、0.37、2.5、4、5、5.98 對應分歧圖分別有二個（二個週期一共存）、無限個（混沌）、三個（週期三）、一個（週期一）、二個（二個週期一共存）、無限個（混沌）。圖十二顯示 Lyapunov 指數是正為混沌響應，Lyapunov 指數是負為週期運動[14]，分歧圖為反對稱的一支出現以週期一響應，之後以隨振幅增加出現以週期倍增而合併進入混沌運動。



圖十二  $x(450T)$ 對振幅分歧圖與最大 Lyapunov 指數對  $P_1$  圖。

## 肆、結論

分析兩個勢井的 Duffing 系統受雙頻率激振之週期運動與混沌響應。Melnikov 解析方法，求取 Duffing 系統受雙頻率激振時，週期運動與混沌響應的臨界參數值。次以數值分析，利用週期-n 時，穩態解的起始值是以基本週期交替出現之特性。取多個初始條件之分歧圖，出現週期三響應，並呈現週期倍增至混沌。亦出現以週期一響應、分裂為反對稱解之二個週期一響應共存、隨振幅增加(遞減)出現以週期倍增反對稱解之二個週期響應共存，而合併進入混沌運動。配合以相圖、頻譜圖、Poincarè 切面圖、響應時序圖和 Lyapunov 指數，證明單一與二外力頻率激振之分歧圖，在參數變化的穩態響應型態。

## 伍、致謝

本研究感謝德霖技術學院專題研究計畫「99 獎校專研 04」補助得以完成，特此致謝。

## 陸、參考文獻

1. Y. Ueda, "Randomly transitional phenomena in the system governed by Duffing's equation," *Journal of Statistical Physics*, vol. 20, pp.181-196, 1979.
2. Y. Ueda, "Steady motions exhibited by Duffing's equation: a picture book of regular and chaotic motions," *In New Approaches to Nonlinear Problems in Dynamics (editor P. J. Holmes)*, pp.311-322, 1980.
3. Y. Ueda, "Random phenomena resulting from non-linearity in the system described by Duffing's equation," *International Journal of Non-linear Mechanics*, vol. 20, pp.481-491, 1985.
4. H. K. Chen, "Chaos and chaos synchronization of a symmetric gyro with linear-plus-cubic damping," *Journal of Sound and Vibration*, vol. 255, pp.719-740, 2002.
5. H. K. Chen, "Author's reply," *Journal of Sound and Vibration*, vol. 268, pp.635-636, 2003.
6. R. V. Dooren, "Chaos and chaos synchronization of a symmetric gyro with linear-plus-cubic damping," *Journal of Sound and Vibration*, vol. 268, pp.632-634, 2003.
7. G. Cheng, J.W. Zu, "Dynamics of a dry oscillator under two-frequency excitations," *Journal of Sound and Vibration*, vol. 275, pp.591-603, 2004.
8. F.M. Moukam, S. Bowong, C. Tchawoua, E. Kaptouom, "Strange attractors and chaos control a Duffing-Van der Pol oscillator wit two external periodic forces," *Journal of Sound and Vibration*, vol. 277, pp.783-799, 2004.
9. Y. Kang, Y.P. Chang and S.C. Jen, "Strongly non-linear oscillations of winding machines, Part I: mode-locking motion and routes to chaos," *Journal of Sound and Vibration*, 209(3), pp.473-492, 1998.
10. Y. Kang, S.C. Jen, S.S. Shyr and Y.P. Chang, "Frequency-locked motion and quasi-periodic motion of a piecewise-linear system subjected to externally nonsynchronous excitations," *Journal of Sound and Vibration*, 214(2), pp.377-382, 1998.
11. Y. Kang, S.C. Jen, P.P. Sheu and S.H. Tu, "Mode-locking motion and chaos of rotors mounting on nonlinear bearings," *International Journal of Rotating Machinery*, 6(3), pp.191-200, 2000.
12. Y. Kang, S.C. Jen, P.P. Sheu and S.H. Tu, "Mode-locking motion and chaos of rotors mounting on nonlinear bearings," *The 7th International Symposium on Transport Phenomena and Dynamics in Rotating Machinery*, ISROMAC-7 No.8126, pp.22-26, Feb. Honolulu, Hawaii, 1998.
13. J. Guckenheimer and P. Holmes, *Nonlinear Oscillations, Dynamical System, and Bifurcation of Vector Field*, Berlin: Springer-Verlag, 1992.
14. A. Wolf, J. B. Swift, H. L. Swinney and J. A. Vastano, "Determining Lyapunov exponents from a time series," *Physica D*, 16, pp.285-315, 1985.

